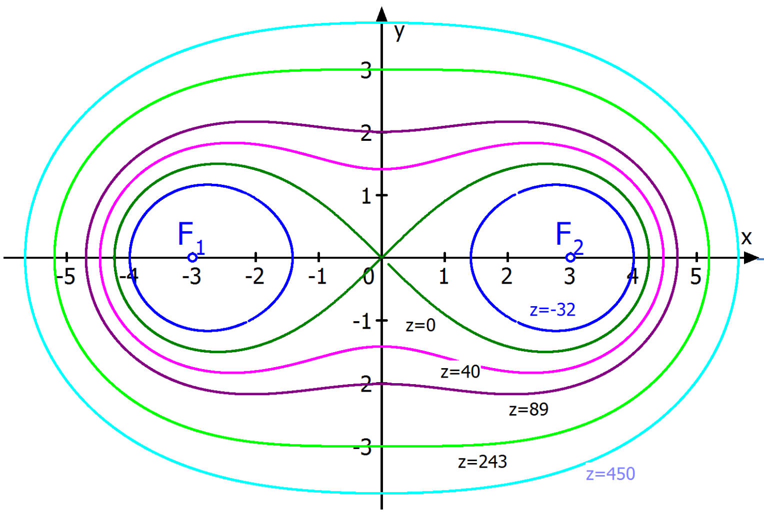
Cassini-Kurven
Lemniskate



Text Nr. 54120

Stand 21. April 2016

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

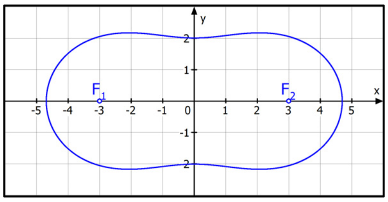
Der Namen „Lemniskate“ ist sicher bekannter als „Cassini-Kurven“. Es sind hochinteressante Kurven mit verblüffenden Formen und Varianten. Wer die Abstandsdefinition für Ellipsen kennt (die Summe der Abstände von zwei Brennpunkten muss konstant (=2a) sein), staunt nicht schlecht, dass man Analoges für das Produkt dieser Abstände machen kann. Und das ergibt dann die Lemniskate, also die Acht-Kurve.
Der mathematische Aufwand ist nicht unerheblich, weil Wurzelrechnen mit trigonometrischen Funktionen zusammen ganz schön anspruchsvoll wird.

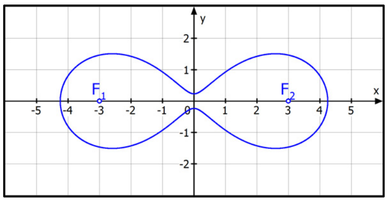
Inhalt

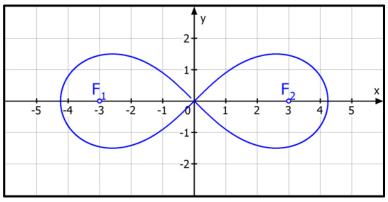
1 Vorschau

Unter einer Cassini-Kurve versteht man die Menge der Punkte $P(x\,|\,y)$, für die das Produkt der Abstände r_1 und r_2 von zwei (Brenn-)Punkten $F_1(-e\,|\,0)$ und $F_2(e\,|\,0)$ konstant ist. Diesen Wert bezeichnet man oft mit k>0, aber auch mit k^2, um klarzumachen, dass das Produkt nicht negativ ist.

Je nach k-Wert erhält man bis zu 5 verschiedene Formen für diese **Cassini-Kurven**, siehe Seite 7/8.
Für e = k heißt diese Kurve dann **Lemniskate** (Abb. rechts).







Koordinatengleichungen: $\left(x^2+y^2\right)^2-2e^2\left(x^2-y^2\right)=k^4-e^4$ mit e > 0 und k > 0

bzw. $\left(x^2+y^2\right)^2-2e^2\left(x^2-y^2\right)=0$ für die Lemniskate.

Ersatzfunktionen: $y_{1,2}=\pm\sqrt{-\left(x^2+e^2\right)+\sqrt{4e^2\cdot x^2+k^4}}$

bzw. $\pm\sqrt{-\left(x^2+e^2\right)+e\cdot\sqrt{4\cdot x^2+e^2}}$ für die Lemniskate.

In Polarkoordinaten: $r^2=e^2\cos(2\varphi)\pm\sqrt{e^4\cdot\cos^2(2\varphi)+\left(k^4-e^4\right)}$

bzw. $r=e\sqrt{2\cdot\cos(2\varphi)}$ für die Lemniskate.

Hieraus folgt die Parameterdarstellung:

$$x(\varphi)=r\cdot\cos(\varphi)\quad\Rightarrow\quad x(\varphi)=e\cdot\cos(\varphi)\cdot\sqrt{2\cdot\cos(2\varphi)}$$

$$y(\varphi)=r\cdot\sin(\varphi)\quad\Rightarrow\quad x(\varphi)=e\cdot\sin(\varphi)\cdot\sqrt{2\cdot\cos(2\varphi)}$$

Man findet auch diese Formeln:

$$x(\varphi)=\frac{e\sqrt{2}\cdot\cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)+1}\quad\text{und}\quad y(\varphi)=\frac{e\sqrt{2}\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\varphi)}{\sin^2(\varphi)+1}$$

2. Herleitung der Koordinatengleichung

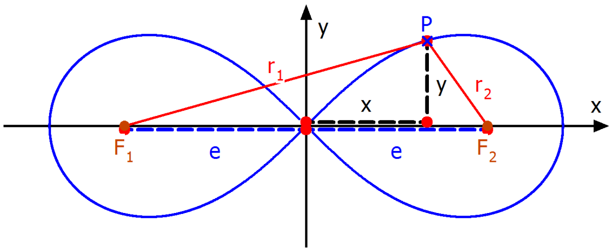
Unter einer Cassini-Kurve versteht man die Menge der Punkte $P(x\,|\,y)$, für die das Produkt der Abstände r_1 und r_2 von zwei (Brenn-)Punkten $F_1(-e\,|\,0)$ und $F_2(e\,|\,0)$ konstant ist..

In dieser Abbildung ist e = 3 und

$\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2} = k^2 = 9$ (k = 3).

In diesem Spezialfall ist k = e.

Diese Cassini-Kurve heißt daher Lemniskate:



Herleitung der Koordinatengleichung

Abstände: $\overline{F_1P} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$ und $\overline{F_2P} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$

Bedingung: $\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2} = k^2$ d. h. $\sqrt{(x+e)^2 + y^2}\cdot\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = k^2 \qquad |^2$

$$\left[(x+e)^2 + y^2\right]\cdot\left[(x-e)^2 + y^2\right] = k^4 \qquad (1)$$

$$\underbrace{(x+e)^2(x-e)^2}_{=[(x+e)(x-e)]^2=(x^2-e^2)^2} + \underbrace{(x+e)^2\cdot y^2 + (x-e)^2\cdot y^2}_{\left[(x+e)^2+(x-e)^2\right]y^2} + y^4 = k^4$$

$$x^4 - 2e^2x^2 + e^4 + \left(x^2 + \cancel{2ex} + e^2 + x^2 - \cancel{2ex} + e^2\right)y^2 + y^4 = k^4$$

$$\underbrace{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}_{(x^2+y^2)^2} - 2e^2x^2 + 2e^2y^2 = k^4 - e^4$$

Ergebnis: **Cassini-Kurve:** $\left(x^2+y^2\right)^2 - 2e^2\left(x^2-y^2\right) = k^4 - e^4$ (C1)

Im Falle einer **Lemniskate** ist k = e, also $\left(x^2+y^2\right)^2 - 2e^2\left(x^2-y^2\right) = 0$ (L1)

3. Ersatzfunktionen

Dazu löst man die Gleichung (C1) nach y auf:

$$\left(x^2+y^2\right)^2 - 2e^2\left(x^2-y^2\right) = k^4 - e^4$$

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2e^2x^2 + 2e^2y^2 = k^4 - e^4$$

$$y^4 + 2\left(x^2+e^2\right)y^2 + \left[x^4 - 2e^2x^2 - k^4 + e^4\right] = 0$$

Dies ist eine biquadratische Gleichung, also eine quadratische Gleichung für y^2:

$$y^2_{1,2} = \frac{-2\left(x^2+e^2\right) \pm \sqrt{4\left(x^2+e^2\right)^2 - 4\cdot\left[x^4 - 2e^2x^2 - k^4 + e^4\right]}}{2}$$

$$y^2_{1,2} = -\left(x^2+e^2\right) \pm \sqrt{\left(x^4 + 2e^2x^2 + e^4\right) - \left[x^4 - 2e^2x^2 - k^4 + e^4\right]}$$

$$y^2_{1,2} = -\left(x^2+e^2\right) \pm \sqrt{4e^2\cdot x^2 + k^4}$$

Das Minuszeichen vor der Wurzel ergibt nur negative Werte für y^2, kann also wegfallen.

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{-\left(x^2+e^2\right) + \sqrt{4e^2\cdot x^2 + k^4}}$$

Im Falle der Lemniskate (k = e) gilt dann

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{-\left(x^2+e^2\right) + \sqrt{4e^2\cdot x^2 + e^4}} = \pm\sqrt{-\left(x^2+e^2\right) + e\cdot\sqrt{4\cdot x^2 + e^2}}$$

4. Herleitung einer Gleichung mit Polarkoordinaten

Diese implizite Gleichung ist sehr unhandlich für die Anwendung. Daher wandle ich sie in Polarkoordinaten um. Ich setze $\begin{matrix} x = r \cdot \cos(\varphi) \\ y = r \cdot \sin(\varphi) \end{matrix}$ ein und erhalte

$$\left(r^2\cos^2(\varphi)+r^2\sin^2(\varphi)\right)^2 - 2e^2\left(r^2\cos^2(\varphi)-r^2\sin^2(\varphi)\right) = k^4 - e^4$$

$$\left(r^2\underbrace{\left[\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\right]}_{=1}\right)^2 - 2e^2r^2\underbrace{\left[\cos^2(\varphi)-\sin^2(\varphi)\right]}_{=\cos(2\varphi)} = k^4 - e^4$$

Es folgt: $$r^4 - 2e^2r^2\cdot\cos(2\varphi) = k^4 - e^4 \qquad (*)$$

Wenn es sich um eine **Lemniskate** handelt: $r^4 - 2e^2r^2\cdot\cos(2\varphi) = 0 \quad | : r^2 \quad (\neq 0)$

$$r^2 - 2e^2\cdot\cos(2\varphi) = 0 \quad \text{also:} \quad r = e\cdot\sqrt{2\cdot\cos(2\varphi)} \qquad \text{(L2)}$$

Ist aber $k \neq e$, dann ist (*) eine biquadratische Gleichung, also eine quadratische Gleichung für r^2:

$$r^4 - 2e^2r^2\cdot\cos(2\varphi) - \left(k^4 - e^4\right) = 0$$

$$r^2 = \frac{2e^2\cos(2\varphi) \pm \sqrt{4e^4\cdot\cos^2(2\varphi) + 4\left(k^4 - e^4\right)}}{2}$$

$$r^2 = e^2\cos(2\varphi) \pm \sqrt{e^4\cdot\cos^2(2\varphi) + \left(k^4 - e^4\right)} \qquad \text{(C2)}$$

5. Schnittpunkte mit der x-Achse:

Bedingung: $y = 0$. Einsetzen in (1): $\left[(x+e)^2 + y^2\right]\cdot\left[(x-e)^2 + y^2\right] = k^4$

Es folgt $(x+e)^2\cdot(x-e)^2 = k^4 \qquad | \sqrt{\ }$

$(x+e)(x-e) = \pm k^2$

$x^2 - e^2 = \pm k^2$ bzw. $x^2 = e^2 \pm k^2$

Also: $x_N = \pm\sqrt{e^2 \pm k^2}$ (2)

Ergebnis: Es kann also bis zu 4 Schnittpunkte geben.

6. Schnitt mit der y-Achse:

Bedingung: x = 0: Einsetzen in (1): $\left[(x+e)^2 + y^2\right]\cdot\left[(x-e)^2 + y^2\right] = k^4$

$\left[e^2 + y^2\right]\cdot\left[e^2 + y^2\right] = k^4 \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^2 + y^2\right)^2 = k^4 \qquad | \sqrt{\ }$

$e^2 + y^2 = \pm k^2$

Der Fall $e^2 + y^2 = -k^2$ kann nicht eintreten, denn $e^2 + y^2 \geq 0$.

$e^2 + y^2 = k^2$

$y^2 = k^2 - e^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{k^2 - e^2}$ (3)

Es gibt keinen Schnittpunkt, wenn $k^2 < e^2 \quad \Leftrightarrow \quad k < e$ ist.

Für den Fall $k = e$ ist $y = 0$. Dann schneidet die Kurve die y-Achse nur im Ursprung.

Diese Kurvenart heißt **Lemniskate**

7 Berechnung der Extrempunkte der Lemniskate

Zuerst Hoch- und Tiefpunkte:

Ich gehe von der impliziten Gleichung aus: $F(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^2-2e^2\left(x^2-y^2\right)=0$

Die implizite Ableitung liefert uns: $y'=-\frac{F_x}{F_y}$

Berechnung der partiellen Ableitungen:

$$F_x=2\left(x^2+y^2\right)\cdot 2x-2e^2\cdot 2x=4x\left(x^2+y^2\right)-4e^2x$$

$$F_y=2\left(x^2+y^2\right)\cdot 2y-2e^2\cdot(-2y)=4y\left(x^2+y^2\right)+4e^2y$$

Also folgt: $$y'=\frac{4x\left(x^2+y^2\right)-4e^2x}{4y\left(x^2+y^2\right)+4e^2y}$$

Wie man sieht, ist in $(x\,|\,y)=(0\,|\,0)$ keine Berechnung der Ableitung möglich, da $F_x=F_y=0$ sind.

Notwendige Bedingung für Extremstellen: $y'=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4x\left(x^2+y^2\right)-4e^2x=0$

d. h. $4x\left(\left(x^2+y^2\right)-e^2\right)=0$

Da x = 0 ausscheidet, folgt: $x^2+y^2=e^2 \qquad (1)$

Dies setzt man in F(x,y) = 0 ein: $e^4-2e^2\left(x^2-y^2\right)=0 \qquad |\ :\ e^2\neq 0$

$e^2-2\left(x^2-y^2\right)=0$

Ergibt $x^2-y^2=\frac{1}{2}e^2 \qquad (2)$

Elimination von y^2 durch (1) + (2): $2x^2=\frac{3}{2}e^2 \quad\Rightarrow\quad x^2=\frac{3}{4}e^2 \quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\pm\frac{e}{4}\sqrt{3}$

Einsetzen in (1): $y^2=e^2-x^2=e^2-\frac{3}{4}e^2=\frac{1}{4}e^2 \quad\Rightarrow\quad y_{1,2}=\pm\frac{1}{2}e$.

Die möglichen Extrempunkte sind daher: $E_{1,2,3,4}\left(\pm\frac{e}{2}\sqrt{3}\,|\,\pm\frac{1}{2}e\right)$

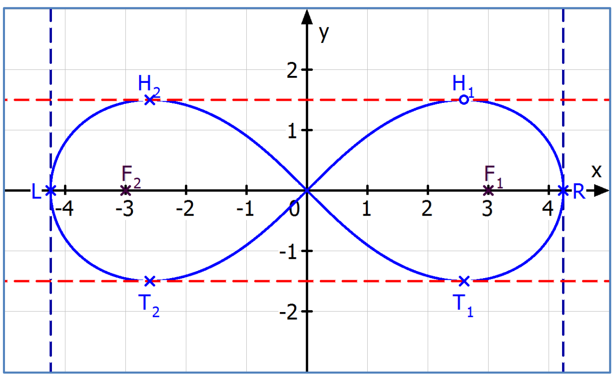
Für „unsere“ Kurve mit e = 3 ergibt das $E_{1,2,3,4}\left(\pm\frac{3}{2}\sqrt{3}\,|\,\pm\frac{3}{2}\right)\approx(\pm2{,}6\,|\,\pm1{,}5)$

Dann die Links- und Rechts-Punkte:

Die ganz einfache Berechnung geht über die Anschauung und die Definition der Lemniskate:
Im jedem Kurvenpunkt, also auch im Rechtspunkt $R(r\,|\,0)$ ist das Produkt der Abstände von den Brennpunkten $F_{1,2}(\pm e\,|\,0)$ gleich e^2. Aus $\overline{RF_1}=r-e$, $RF_2=r+e$ folgt mit dieser Bedingung:
$(r-e)\cdot(r+e)=e^2$ d. h. $r^2-e^2=e^2 \quad\Rightarrow\quad r^2=2e^2 \quad\Leftrightarrow\quad r=e\sqrt{2}$

Also ist $R\left(e\sqrt{2}\,|\,0\right)$ und aus Symmetriegründen: $L\left(-e\sqrt{2}\,|\,0\right)$.

Für unsere gezeichnete Kurve ergibt dies: $R(4{,}24\,|\,0)$ und $L(-4{,}24\,|\,0)$



Es gibt nur ein kleines Problem dabei. Wir haben dabei nicht nachgewiesen, dass es in R und L senkrechte Tangenten gibt.

Das kann man natürlich nachträglich noch beweisen: Dazu muss F_y Null werden:

$$F_y(x,y) = 4y\left(x^2+y^2\right)+4e^2y$$

Für $R\left(e\sqrt{2}\mid 0\right)$ gilt: $F_y\left(e\sqrt{2},0\right) = 4\cdot 0\cdot\left(2e^2+0\right)+4e^2\cdot 0 = 0$

Analoges gilt für $L(-4{,}24\mid 0)$.

Es ist nicht schwer, die Berechnung der Extrempunkte auf Cassini-Kurven zu erweitern.

Die Gleichung lautet $F(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^2 - 2e^2\left(x^2-y^2\right)-\left(k^4-e^4\right) = 0$

Die Ableitungen sind gleich denen der Lemniskate.

Notwendige Bedingung für Extremstellen: $y' = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 4x\left(x^2+y^2\right)-4e^2x = 0$

d. h. $4x\left(\left(x^2+y^2\right)-e^2\right) = 0 \qquad (0)$

Wenn $(x\mid y) = (0\mid 0)$ *ausscheidet*, folgt: $x^2+y^2 = e^2 \qquad (1)$

Eingesetzt in F(x,y) = 0 folgt dann: $e^4 - 2e^2\left(x^2-y^2\right)-\left(k^4-e^4\right) = 0$

d. h. $2e^4 - k^4 = 2e^2\left(x^2-y^2\right)$

also $x^2 - y^2 = \dfrac{2e^4-k^4}{2e^2} = e^2 - \dfrac{k^4}{2e^2} \qquad (2)$

Elimination von y^2 durch (1) + (2): $2x^2 = 2e^2 - \dfrac{k^4}{2e^2} \quad\Rightarrow\quad x^2 = e^2 - \dfrac{k^4}{4e^2} = \dfrac{4e^4-k^4}{4e^2}$

$$\Rightarrow\quad x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{4e^4-k^4}}{2e}$$

Elimination von x^2 durch (1) – (2): $2y^2 = \dfrac{k^4}{2e^2} \quad\Rightarrow\quad y^2 = \dfrac{k^4}{4e^2} \quad\Rightarrow\quad y = \pm\dfrac{k^2}{2e}$

Ergebnis: $E\left(\pm\dfrac{\sqrt{4e^4-k^4}}{2e}\mid \pm\dfrac{k^2}{2e}\right)$

Es gibt aber Cassini-Kurven die nicht durch $(x\mid y) = (0\mid 0)$ *gehen, dann hat die Gleichung (0) auch noch die Lösung x = 0, weil dann* $y \neq 0$ *ist. Dann ist auch* $F_y \neq 0$*:*

$$y'(x=0, y\neq 0) = \frac{4\cdot 0\left(0+y^2\right)-4e^2\cdot 0}{4y\left(0+y^2\right)+4e^2y} = \frac{0}{4y^3+4e^2y} = 0$$

Folgerung: Geht eine Cassini-Kurve nicht durch den Ursprung, hat sie auch noch bei x = 0 eine Extremstelle (H und T).

8. Es gibt 5 verschiedene Formen von Cassini-Kurven

Die Fallunterscheidung richtet sich nach Anzahl und Art der Extrempunkte $E\left(\pm\frac{\sqrt{4e^4-k^4}}{2e} \mid \pm\frac{k^2}{2e}\right)$.

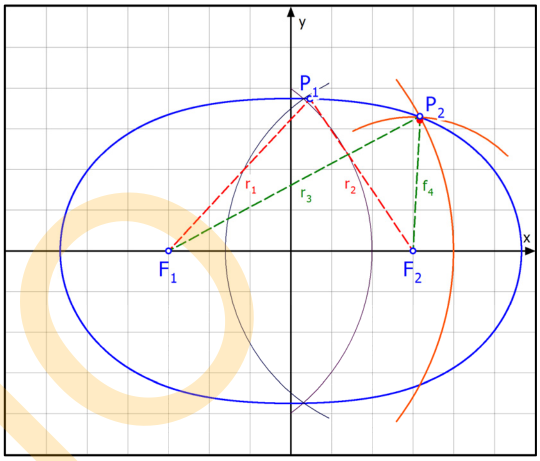
1. Fall: $k > e\cdot\sqrt{2}$ Dann ist $4e^4 - k^4 < 0$, d. h. diese Extrempunkte existieren nicht.

In der Berechnung der Extrempunkte tritt hier dagegen die Extremstelle 0 auf.

Diese Cassini-Kurve hat eine ellipsenähnliche Form und 1 Hochpunkt und 1 Tiefpunkt.

Mit e = 3 lautet diese Bedingung: $k > 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$ z. B. k = 4,8.

$$r = \sqrt{9\cdot\cos(2\varphi) + \sqrt{81\cdot\cos^2(2\varphi) + 449{,}8416}}$$



Eingezeichnet sind zwei Kurvenpunkte P_1 und P_2 mit der Eigenschaft

$r_1\cdot r_2 = 4{,}8^2$ bzw. $r_3\cdot r_4 = 4{,}8^2$

Sie schneidet die x-Achse in

$x_N = \pm\sqrt{e^2 \pm k^2} = \pm\sqrt{9+23{,}04} \approx \pm 5{,}66$

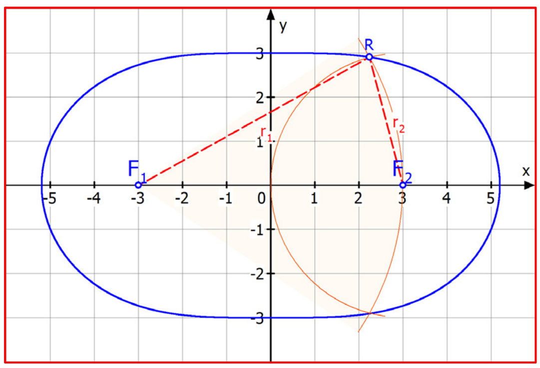
Der Fall $\pm\sqrt{9-23{,}04}$ *wird nicht reell.*

Und die y-Achse in

$y = \pm\sqrt{k^2 - e^2} = \pm\sqrt{23{,}04 - 9} \approx \pm 3{,}75$

2. Fall $k = e\cdot\sqrt{2}$ Jetzt wird $4e^4 - k^4 = 0$, d.h. die obigen Extrempunkte haben x = 0, aber nicht den Ursprung. Daher kommt diese Lösung x = 0 doppelt vor, was sich als Flachpunkt äußert. Mit e = 3 lautet diese Bedingung: $k = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$, also $k^2 = 18$

Aus (C2): $r = \sqrt{9\cdot\cos(2\varphi) + \sqrt{81\cdot\cos^2(2\varphi) + 243}}$



Sie hat auch ellipsenähnliche Form, ist aber an den Extrempunkten deutlich flacher: Ihre Krümmung ist dort sogar 0.

R hat von F_1 die Entfernung $r_1 = 6$

und von F_2 die Entfernung $r_2 = 3$:

Da $r_1\cdot r_2 = 18 = k^2$ ist, liegt R auf der Kurve.

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$x_N = \pm\sqrt{e^2 + 2e^2} = \pm e\sqrt{3} = \pm 3\sqrt{3}$

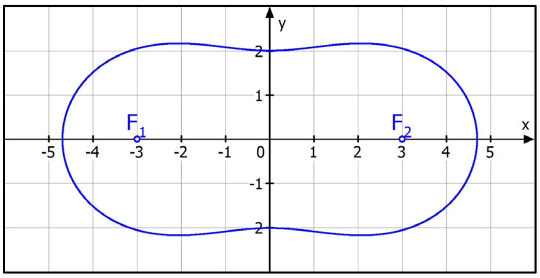
Schnittpunkte mit der y-Achse nach: $y = \pm\sqrt{k^2 - e^2} = \pm\sqrt{2e^2 - e^2} = \pm\sqrt{e^2} = \pm e$

3. Fall: $e < k < e\sqrt{2}$ Hier ist dann $4e^4 - k^4 > 0$, d.h. man erhält zwei verschiedene Extremstellen und – weil die Kurve nicht durch den Ursprung geht, zusätzlich noch die Extremstelle x = 0.

Beispiel: e = 3, also 3 < k < 4,24. Ich wähle k = 3,6. Aus (C2) folgt:

$$r = \sqrt{9 \cdot \cos(2\varphi) + \sqrt{81 \cdot \cos^2(2\varphi) + 88{,}9616}}$$

Die Kurve ist jetzt ein eingedrücktes Oval.



Extrempunkte $E_{1234} = (\pm 2{,}08 \mid \pm 2{,}16)$

sowie $E_{5,6}(0 \mid \pm 1{,}99)$

Info: Sie hat 4 Wendepunkte:

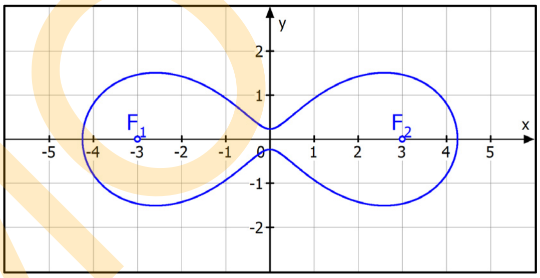
$$W_{1,2}\left(\pm\sqrt{\frac{a-b}{2}} \mid \pm\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right) \quad \text{mit} \quad a = \sqrt{\frac{k^4 - e^4}{3}} \quad \text{und} \quad b = \frac{k^4 - e^4}{3e^2}.$$

Zu diesem 3. Fall gehört auch diese Kurve

$$r = \sqrt{9 \cdot \cos(2\varphi) + \sqrt{81 \cdot \cos^2(2\varphi) + 1}}$$

Hier ist e = 3 und $k^4 - e^4 = 1$, also

$k^4 = e^4 + 1 = 82 \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt[4]{82} \approx 3{,}00922$



4. Fall: Nun lassen wir den Summanden +1 weg, was für $e = k$ passiert:

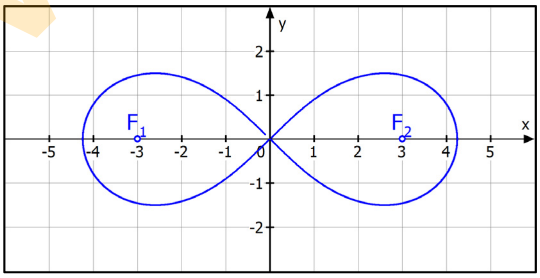
Beispiel: e = 3, also k = 3

Aus (C2): $r = \sqrt{9 \cdot \cos(2\varphi) + \sqrt{81 \cdot \cos^2(2\varphi)}}$

bzw. $r = \sqrt{9 \cdot \cos(2\varphi) + 9 \cdot \cos(2\varphi)}$

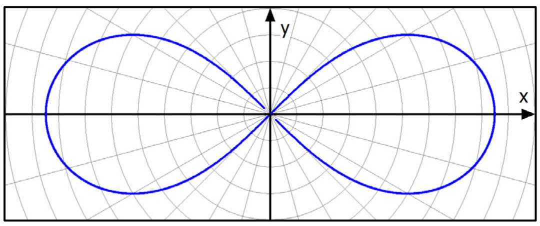
bzw. $r = \sqrt{18 \cdot \cos(2\varphi)}$

also: $r = 3\sqrt{2 \cdot \cos(2\varphi)}$



Diese Kurve ist die **Lemniskate:**

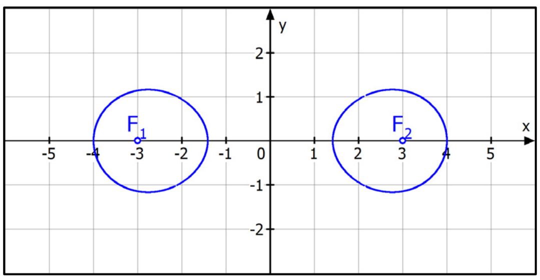
Oder so mit einem *Polarkoordinatennetz*:



5. Fall: $k < e$: Beispiel: e = 3, k = $\sqrt{7}$

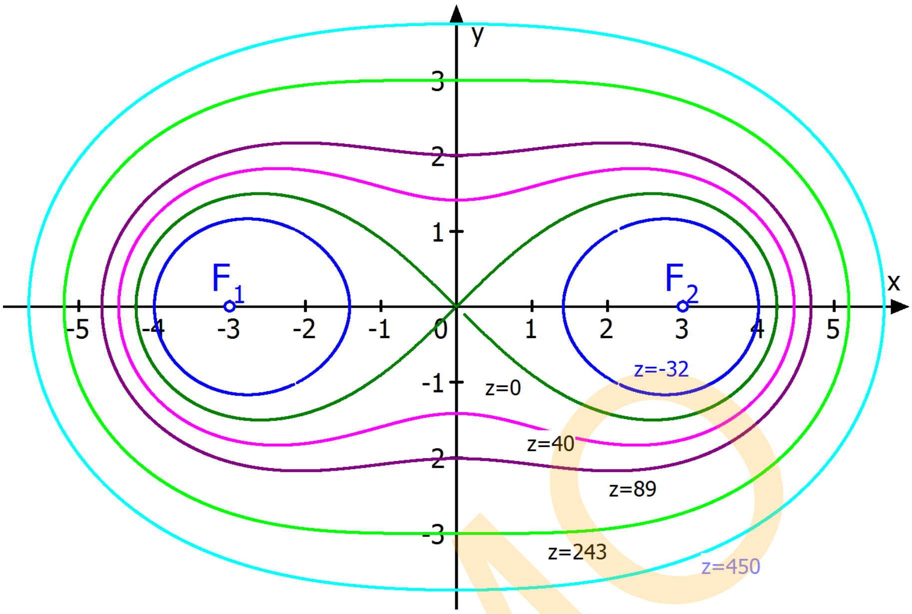
(C2): $r = \sqrt{9 \cdot \cos(2\varphi) + \sqrt{81 \cdot \cos^2(2\varphi) - 32}}$

Die Kurve besteht jetzt nur aus zwei kleinen Ovalen. Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind $N\left(\pm\sqrt{e^2 \pm k^2} \mid 0\right)$ und die Extrempunkte sind im Beispiel $E\left(\pm 2{,}76 \mid \pm \frac{7}{6}\right)$



Hier eine ganze Schar von Cassini-Kurven mit allen Typen:

$$r = \sqrt{9 \cdot \cos(2\varphi) + \sqrt{81 \cdot \cos^2(2\varphi) + z}}$$



9. Untersuchung einer Lemniskate mit dem CAS-Rechner TI Nspire

Ich wähle e = 3, dann gilt für die Lemniskate auch k = 3

Dazu verwende ist diese Formeln: $r(t) = 3 \cdot \sqrt{2 \cdot \cos(2t)}$ mit t statt φ.

$$x(t) = r(t) \cdot \cos(t)$$
$$y(t) = r(t) \cdot \sin(t)$$

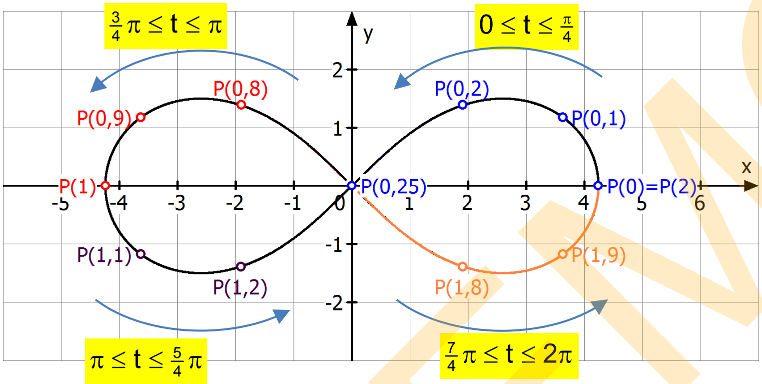
Um alle drei Werte auf einmal zu bekommen definiere ich eine Funktion mit drei Werten:

Define $f(t)=\left[3\cdot\sqrt{2\cdot\cos(2\cdot t)} \quad 3\cdot\sqrt{2\cdot\cos(2\cdot t)}\cdot\cos(t) \quad 3\cdot\sqrt{2\cdot\cos(2\cdot t)}\cdot\sin(t)\right]$ *Fertig*

Mit ihr berechne ich diese Tripel: $[r(t) \quad x(t) \quad y(t)]$

$P(x(t) \mid y(t))$ trage ich dann mit MatheGrafix in die Lemniskate ein. Daraus kann man erkennen, zu welchen Winkeln (t bzw. φ) dann die Punkte bzw. Kurvenbögen gehören. Die Schreibweise P(z) bedeutet $P(z \cdot \pi)$.

$f(0)$	$[3\cdot\sqrt{2} \quad 3\cdot\sqrt{2} \quad 0]$
$f(0.1\cdot\pi)$	[3.81606 3.62929 1.17923]
$f(0.2\cdot\pi)$	[2.35845 1.90803 1.38626]
$f(0.22\cdot\pi)$	[1.83654 1.41508 1.17065]
$f(0.25\cdot\pi)$	[0. 0. 0.]
$f(0.3\cdot\pi)$	"Fehler: Nicht−reelles Ergebnis"
$f(0.5\cdot\pi)$	"Fehler: Nicht−reelles Ergebnis"
$f(0.75\cdot\pi)$	[0.000001 ⁻9.48683ᴇ⁻7 9.48683ᴇ⁻7]
$f(0.8\cdot\pi)$	[2.35845 ⁻1.90803 1.38626]
$f(0.9\cdot\pi)$	[3.81606 ⁻3.62929 1.17923]
$f(\pi)$	$[3\cdot\sqrt{2} \quad {}^{-}3\cdot\sqrt{2} \quad 0]$
$f(1.1\cdot\pi)$	[3.81606 ⁻3.62929 ⁻1.17923]
$f(1.2\cdot\pi)$	[2.35845 ⁻1.90803 ⁻1.38626]
$f(1.25\cdot\pi)$	"Fehler: Nicht−reelles Ergebnis"
$f(1.75\cdot\pi)$	"Fehler: Nicht−reelles Ergebnis"
$f(1.76\cdot\pi)$	[1.06312 0.774983 ⁻0.727757]
$f(1.8\cdot\pi)$	[2.35845 1.90803 ⁻1.38626]
$f(1.9\cdot\pi)$	[3.81606 3.62929 ⁻1.17923]
$f(2\cdot\pi)$	$[3\cdot\sqrt{2} \quad 3\cdot\sqrt{2} \quad 0]$



Man erkennt, dass es Winkel-Intervalle gibt, zu denen es keine Kurvenpunkte gibt, weil der Radikand von r(t) negativ wird, z.B. $\left]\frac{1}{4}\pi; \frac{3}{4}\pi\right[$ und $\left]\frac{5}{4}\pi; \frac{7}{4}\pi\right[$.

Die rechte Schleife erhält man für $0 \le t \le \frac{1}{4}\pi$ (oben) und für $\frac{7}{4}\pi \le t \le 2\pi$ bzw. $-\frac{1}{4}\pi \le t \le 0$, also insgesamt für $-\frac{1}{4}\pi \le t \le \frac{1}{4}\pi$.

10. Berechnung der Fläche der Lemniskate

Für die Polarkoordinatendarstellung gilt die Flächenformel $\boxed{F = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\,d\varphi}$ (Text 54011).

Man sollte folgenden kleinen Trick anwenden:
Für $-\frac{1}{4}\pi \le \varphi \le \frac{1}{4}\pi$ erhält man die halbe Fläche, also den Inhalt der rechten Schleife.

Also rechnet man:

$$\frac{1}{2}F = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} 2e^2\cos(2\varphi)\,d\varphi = e^2\cdot\left[\frac{\sin(2\varphi)}{2}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{e^2}{2}\cdot\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{e^2}{2}\cdot\left[1-(-1)\right] = e^2 \text{ FE}$$

Also ist $\boxed{F = 2e^2 \text{ FE}}$

11. Bogenlänge der Lemniskate

Die Bogenlänge einer Lemniskate ist nur näherungsweise berechenbar: $U \approx 7{,}416\cdot e$

Die Bogenlänge führt zu einem „unlösbaren" elliptischen Integral. Wer die Berechnung ansehen will, kann dies in *Matroids Matheplanet* tun:

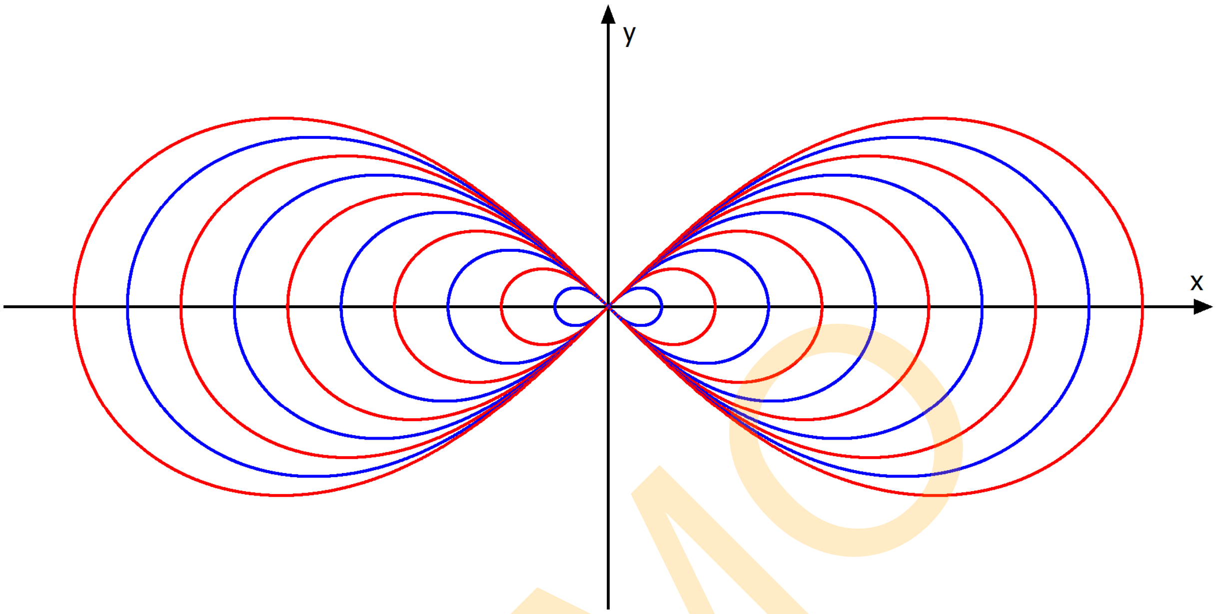
http://matheplanet.com/default3.html?call=article.php?sid=1693&ref=https%3A%2F%2Fwww.google.de%2F

12 ZUM SCHLUSS UNTERHALTSAMES

Hier zeige ich den Einfluss des Parameters a auf die Kurvenform. $r = e\sqrt{2 \cdot \cos(2\varphi)}$

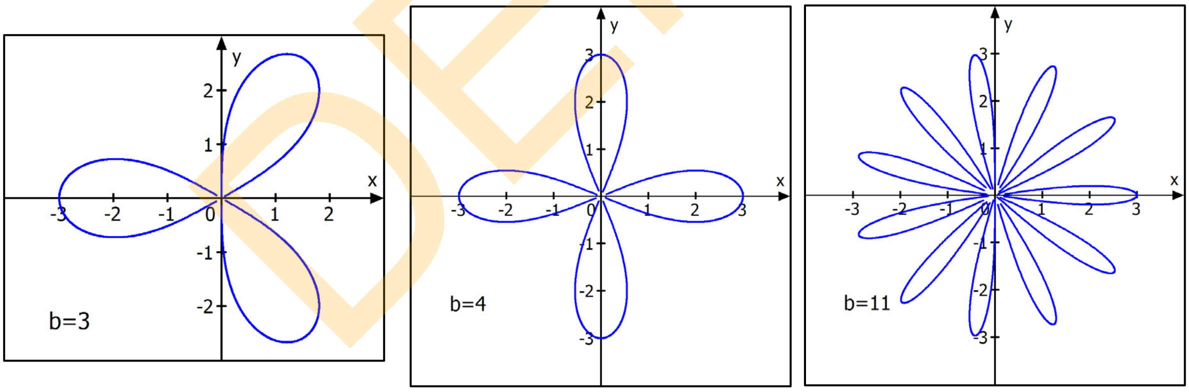
Er bewirkt eine zentrische Streckung der Kurve.

Folgende Parameter wurden verwendet: $e = 0{,}5$ bis 5 step 0,5

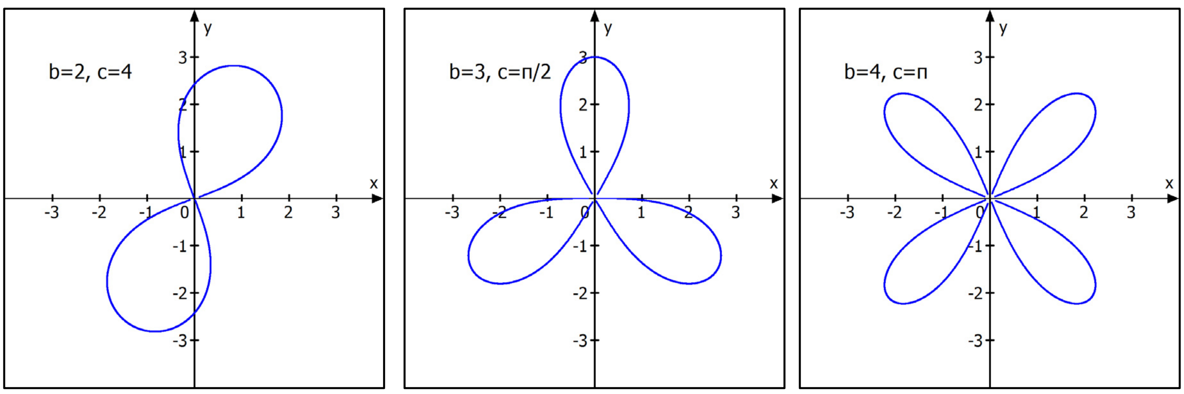


Veränderte Gleichungen führen zu abgewandelten Formen. $r = e\sqrt{\cos(b \cdot \varphi + c)}$

Der Parameter b legt die Anzahl der Schleifen fest:



Der Parameter c bewirkt eine Drehung der Kurve:



Der **Name Lemniskate** ist abgeleitet aus dem lateinischen Wort *lemniscus* = *Schleife.*

Lemniskate bedeutet also schleifenartige Kurve.

Die zuvor hier behandelte Lemniskate mit der Bedingung $\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} = e^2$ geht auf den Mathematiker Jakob Bernoulli (1654 – 1705) zurück und heißt **Lemniskate von Bernoulli**.

Es ist nicht schwer vorstellbar, dass es ähnliche schleifenförmige Kurven gibt.

Ein Beispiel dazu ist die **Lemniskate von Gerono:**

Ihre Gleichungen sind: $\quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \sin(t) \\ a \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) \end{pmatrix} \quad (1)$

bzw. allgemeiner $\quad x^4 = a^2\left(x^2 - y^2\right) \quad (2)$

oder $\quad y = \pm\frac{x}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \quad (3)$

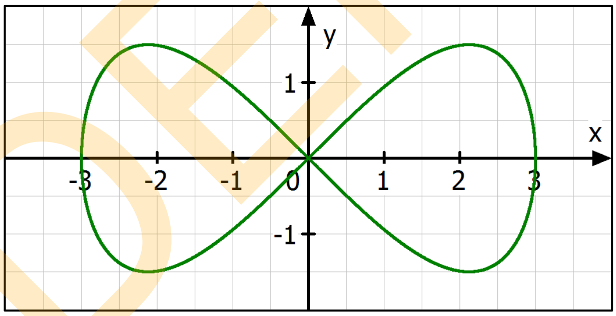
Zahlreiche Informationen und Ausblicke dazu findet man unter

http://www.mathcurve.com/courbes2d/gerono/gerono.shtml

Den Zusammenhang zwischen (1) und (2) erkennt man durch Einsetzen von (1) in (2):

$$\left[a \cdot \sin(t)\right]^4 = a^2 \cdot \left[a^2 \cdot \sin^2(t) - a^2 \cdot \sin^2(t) \cdot \cos^2(t)\right]$$

$$a^4 \cdot \sin^4(t) = a^4 \cdot \sin^2(t) \underbrace{\left[1 - \cos^2(t)\right]}_{\sin^2(t)}$$ Wahre Aussage.



Noch ein Wort zu Giovanni Domenico Cassini (1625 – 1712): Er war Professor an der Universität Bologna für Mathematik und Astronomie. Viele Details dazu findet man in

https://de.wikipedia.org/wiki/Giovanni_Domenico_Cassini